پاسخنامه تشریحی

۱

الف

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی‌مانده (میلی‌گرم)	۳۰۰	۱۵۰	۷۵	$\frac{۷۵}{۲}$	$\frac{۷۵}{۴}$	$\frac{۷۵}{۸}$	$\frac{۷۵}{۱۶}$

ب چون زمان‌های سپری شده دنبالهٔ حسابی و مقدار داروهای باقی‌مانده، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس ضابطهٔ تابع فوق، نمایی است و می‌توان نوشت:

$$f(t) = ab^t$$

باتوجه به جدول داریم: $f(۰) = ۳۰۰$ و $f(۱) = ۱۵۰$، پس:

$$۳۰۰ = ab^۰ \Rightarrow a = ۳۰۰$$

$$۱۵۰ = ab^۱ \Rightarrow ۱۵۰ = ۳۰۰b \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(t) = ۳۰۰(\frac{۱}{۲})^t$$

۲

شرط لگاریتم : $\frac{x-۱}{x+۲} > ۰ \Rightarrow$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$\frac{x-۱}{x+۲}$		$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow x < -۲$ یا $x > ۱ \quad (۱)$

شرط رادیکال : $\log_{۰/۳}(\frac{x-۱}{x+۲}) \geq ۰ \Rightarrow \log_{۰/۳}(\frac{x-۱}{x+۲}) \geq \log_{۰/۳}^{۱}$

$$\Rightarrow \frac{x-۱}{x+۲} \leq ۱ \Rightarrow \frac{x-۱}{x+۲} - ۱ \leq ۰ \Rightarrow \frac{x-۱-x-۲}{x+۲} \leq ۰ \Rightarrow \frac{-۳}{x+۲} \leq ۰$$

با توجه به این که صورت کسر فوق عمودی منفی است. داریم:

$$x+۲ > ۰ \Rightarrow x > -۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) : x > ۱ \Rightarrow D_f = (۱, +\infty)$$

۳

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c \quad , \quad \log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$$

$$\log_{c+b}^a + \log_{c-b}^a = ۲\log_{c+b}^a \cdot \log_{c-b}^a$$

$$\frac{۱}{\log_a^{(c+b)}} + \frac{۱}{\log_a^{(c-b)}} = ۲ \times \frac{۱}{\log_a^{(c+b)}} \times \frac{۱}{\log_a^{(c-b)}}$$

$$\frac{\log_a^{(c-b)} + \log_a^{(c+b)}}{\log_a^{(c+b)} \cdot \log_a^{(c-b)}} = \frac{۲}{\log_a^{(c+b)} \cdot \log_a^{(c-b)}} \Rightarrow$$

$$\log_a(c-b) + \log_a(c+b) = ۲ \Rightarrow \log_a(c-b)(c+b) = ۲$$

$\log_a(c^۲ - b^۲) = ۲ \Rightarrow c^۲ - b^۲ = a^۲ \to c^۲ = a^۲ + b^۲ \to$ **مثلث قائم‌الزاویه است.**

۴

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a \quad , \quad \log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c \quad , \quad \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_{۱۲}^{۲۷} = a \Rightarrow \frac{\log ۳^۳}{\log(۳ \times ۲^۲)} = a \Rightarrow \frac{۳\log ۳}{\log ۳ + ۲\log ۲} = a$$

$$۳\log ۳ = a\log ۳ + ۲a\log ۲ \Rightarrow (۳-a)\log ۳ = ۲a\log ۲ \Rightarrow \log ۳ = (\frac{۲a}{۳-a})\log ۲$$

$$\log_۶^{۱۶} = \frac{\log ۲^۴}{\log ۲ \times ۳} = \frac{۴\log ۲}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{۴\log ۲}{\log ۲ + (\frac{۲a}{۳-a})\log ۲} = \frac{۴\log ۲}{(۱ + \frac{۲a}{۳-a})\log ۲}$$

$$= \frac{۴}{\frac{۳-a+۲a}{۳-a}} = \frac{۴(۳-a)}{a+۳} = \frac{۱۲-۴a}{a+۳}$$

۵

نکته : $\log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b}$

$$A = \frac{۱}{\log_۲^۳} + \frac{۱}{\log_{۱۶}^۹} - \frac{۱}{\log_۸^۳} = \log_۳^۲ + \log_۹^{۱۶} - \log_۳^۸$$

$$A = \log_۳^۲ + \log_{۳^۲}^{۲^۴} - \log_۳^{۲^۳} = \log_۳^۲ + \frac{۴}{۲}\log_۳^۲ - ۳\log_۳^۲$$

$$A = \log_۳^۲ + ۲\log_۳^۲ - ۳\log_۳^۲ = ۰$$

۶

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c \ , \ \log_b^{(\frac{a}{c})} = \log_b^a - \log_b^c \ , \ \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$$

$$\log\frac{۲۴}{۲۵} = \log ۲۴ - \log ۲۵ = \log(۲^۳ \times ۳) - \log ۵^۲ = ۳\log ۲ + \log ۳ - ۲\log ۵$$
$$= ۳\log ۲ + \log ۳ - ۲(۱ - \log ۲) = ۳\log ۲ + \log ۳ - ۲ + ۲\log ۲$$
$$= ۵\log ۲ + \log ۳ - ۲ = ۵a + b - ۲$$

۷

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c \ , \ \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$$

$$\log x(x+۱) = \log ۲^۲ \times ۵ \Rightarrow \log(x^۲ + x) = \log ۲۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + x = ۲۰ \to x^۲ + x - ۲۰ = ۰ \to (x-۴)(x+۵) = ۰$$

$\boxed{x=-۵;}$ غ ق ق $\quad \boxed{x = ۴}$ جواب

۸

از طرفین معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم.

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$$
$$\log x^{(۲-\frac{\log x}{۲})} = \log ۱۰۰ \Rightarrow (۲ - \frac{۱}{۲}\log x)\log x = ۲$$

با فرض $t = \log x$ داریم:

$$(۲ - \frac{۱}{۲}t)t = ۲ \Rightarrow ۲t - \frac{۱}{۲}t^۲ = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}t^۲ - ۲t + ۲ = ۰$$
$$\xrightarrow{\times ۲} t^۲ - ۴t + ۴ = ۰ \to (t-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲ \Rightarrow \log x = ۲$$
$$\Rightarrow x = ۱۰^۲ \to \boxed{x = ۱۰۰}$$

۹

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > ۱ & a \geq c \\ ۰ < b < ۱ & a \leq c \end{cases}$$

$$۳^۴ < ۱۰۰ < ۳^۵ \Rightarrow \log_۳ ۳^۴ < \log_۳ ۱۰۰ < \log_۳ ۳^۵ \to ۴ < \log_۳ ۱۰۰ < ۵$$
$$\Rightarrow [\log_۳ ۱۰۰] = ۴$$

$$۰/۰۱ < ۰/۰۴ < ۰/۱ \Rightarrow ۱۰^{-۲} < ۰/۰۴ < ۱۰^{-۱} \Rightarrow \log ۱۰^{-۲} < \log ۰/۰۴ < \log ۱۰^{-۱}$$

$$\Rightarrow -۲ < \log ۰/۰۴ < -۱ \Rightarrow [\log ۰/۰۴] = -۲$$

$$A = [\log_۳ ۱۰۰] - ۲[\log ۰/۰۴] = ۴ - ۲(-۲) = ۸$$

۱۰

$$\log_b^a \geq \log_b^c \Rightarrow \begin{cases} b > ۱ & a \geq c \\ ۰ < b < ۱ & a \leq c \end{cases}$$

الف) شرط لگاریتم : $x - ۵ > ۰ \to x > ۵ \quad (۱)$

شرط رادیکال: $\log_{۲}(x-۵) \geq ۰ \Rightarrow \log_{۲}(x-۵) \geq \log_{۲}^{۱} \Rightarrow x-۵ \geq ۱$

$\Rightarrow x \geq ۶ \quad (۲) \quad \rightarrow \quad (۱) \cap (۲) \Rightarrow x \geq ۶ \rightarrow D_f = [۶, +\infty)$

ب) شرط لگاریتم: $x+۳ > ۰ \rightarrow x > -۳ \quad (۱)$

شرط رادیکال: $\log_{۰/۲}(x+۳) \geq ۰ \Rightarrow \log_{۰/۲}(x+۳) \geq \log_{۰/۲}^{۱} \Rightarrow x+۳ \leq ۱$

$\Rightarrow x \leq -۲ \quad (۲) \Rightarrow (۱) \cap (۲) \Rightarrow -۳ < x \leq -۲ \rightarrow D_g = (-۳, -۲]$